

山地河道における浅水流に関する波動方程式の導出とその解析解の検討

A STUDY OF WAVE EQUATION AND ITS SOLUTIONS OF SHALLOW WATER IN MOUNTAIN BASIN

新井宗之¹・安田 孝志²・中川 一³

Muneyuki ARAI, Takashi YASUDA and Hajime NAKAGAWA

¹ 正会員 博士(工学) 博士(農学) 名城大学准教授 理工学部建設システム工学科 (〒 468-8502 愛知県名古屋市天白区塩釜口 1-501)

² フェロー 工博 愛知工科大学学長・教授 (〒 443-0047 愛知県蒲郡市西迫町馬乗 50-2)

³ フェロー 工博 京都大学防災研究所教授 附属流域災害研究センター (〒 612-8235 京都府京都市伏見区横大路下三栖東ノ口)

Viscous debris flow which is observed at Jang Jia Gully in China, is flow as lots of surges intermittently. Many intermittent debris flows have been observed in Europe mountain basin too. But these characteristics of the flow are not made to be clear. This paper is described about a wave equation and its solutions obtained by perturbation method. This paper shows a wave equation of shallow water with sediment on inclined channel obtained by perturbation method and the solutions. It is possible to estimate the fluctuation of depth of shallow water by numerical simulation. But it is very important to obtain the wave equation and the solutions for explaining wave motion of the flow.

Key Words: 波動方程式, 解析解, 浅水流, 転波列, 土石流, 間欠性サージ, 実験

1. はじめに

中国・雲南省の蒋家溝で観測される粘性土石流と呼ばれる土石流は多数のサージ状の流下現象で知られている¹⁾。日本では鹿児島県・桜島の野尻川等で観測されている。また、欧州のイタリア、スイス、オーストリアの山間部でも間欠的な土石流サージが観測されている。このような間欠的な土砂流のサージは流れの不安定性による転波列の一種であると考えられる^{2),3)}。

流れの不安定性による転波列の生成については Dressler⁴⁾ が流れの不安定性から数学的な優れた検討をしている。石原・岩垣・岩佐⁵⁾ は Dressler の内容を踏まえて薄層流の流れに適応している。新井らは粘性土石流や泥流タイプの土石流等の土砂流についてもこの流れの不安定性により転波列が生成することを示している^{2),3)}。

しかし、これらの間欠的に流下するサージの波動性についてはまだほとんど明らかにされていない。疋田ら⁶⁾ は桜島の長谷川や野尻川での間欠的な土石流サージについて検討している。五十嵐・泉・細田⁷⁾ は転波列の流下過程での発達について論じている。Richard⁸⁾ は転波列の発達過程について詳細な実験を行っている。Lanzoni ら⁹⁾ は土石流の波状について数学的な検討をしている。Massimo ら¹⁰⁾ は Italy の山間部の間欠的な土石流を観測しその特性を検討している。Murlimann ら¹¹⁾

は Swiss 山間部で、Huebl ら¹²⁾ は Austria の山間部で間欠的な土石流を観測しその特性を検討している。また、Sandro¹³⁾ は土石流の流動モデルの一つであるダイラント流体の転波列について検討している。しかしながら土砂を含有した流れの波動性に着目した研究は、新井ら^{14),15)} の転波列サージの波長に関する検討はあるものの波動方程式に基づく検討はほとんどなされていないと言える。また、与えられた境界条件による任意の点の水面変動は運動方程式等からのシミュレーションにより知ることは可能であるが、その波動現象がどのような特性を有しているかを詳細に検討するためはその現象の支配方程式からの波動方程式を導出して検討することが非常に重要である。

本研究では山地河道における土砂を含有した流れも表す浅水流方程式をもとにして波動方程式を導出し、その解析解を示している。

2. 基礎方程式

流体の流下現象において、非圧縮 ($\text{div} \vec{v} = 0$)、非回転 ($\text{rot} \vec{v} = 0$) 現象として取り扱おうと、速度ポテンシャル ϕ が導入でき流下方向を x 、その垂直方向 (水深方向) を y とするとラプラス方程式 $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ (1) の関係がある。水深方向 (y 方向) の流速成分を v とすると、水底

($y = -h_0$, h_0 : 平均水深)での境界条件は, $v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ (2) である. 水面の平均水深からの変動量 $\eta(x, t)$ が, 水面の流体粒子の運動と一致する条件は $\frac{D}{Dt}(y - \eta) = 0$, $\frac{Dy}{Dt} = v$ であることから, $v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$ (3) を満たす必要がある. この式は連続式を意味している. 浅水流の運動方程式および連続式は, 運動量補正係数を $\beta = 1$ とすると次式のようなである.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = g \sin \theta - g \cos \theta \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{f'}{2} \frac{u^2}{R} \quad (4)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial (Au)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

ここに, u : x 方向の断面平均流速, A : 流積, g : 重力加速度, θ : 水路勾配, R : 径深, h : 水深, f' : 摩擦損失係数.

ここでは, さらに, 水深 h に比して水路幅 B が広い矩形断面のよう断面水路で単位幅の流れとし, 径深 R は $R \doteq h$ で平均水深 h_0 とする. また, 摩擦損失係数 f' は水深の関数であるが平均水深 h_0 に基づく定数と仮定する. さらに, 摩擦損失係数 f' と流速係数 $\varphi = \frac{u}{u_*}$ の関係 $\frac{f'}{2} = \left(\frac{u_*}{u}\right)^2$, および Dressler が流れの不安定性による転波列の生成条件の検討の中で用いた方法を参考に,

$$\frac{f'}{2} \frac{u^2}{h_0} = \frac{u_*}{\varphi h_0} u \quad (6)$$

とすると, 運動方程式は次式のようなになる.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - g \sin \theta x + g \cos \theta h + \frac{u_*}{\varphi h_0} \phi = 0 \quad (7)$$

3. 基礎方程式の無次元表示

無次元量を次のように定義する. 無次元量にはプライム (') を付すと, $\phi' = \phi / (h_0 v_{p0})$, $x' = x / h_0$, $y' = y / h_0$, $t' = t v_{p0} / h_0$, $\eta' = \eta / h_0$ である. ここに, v_{p0} は速度の次元を有するパラメータで, 移動座標系における座標の移動速度を意味している.

Gardner-Morikawa(G-M) 変換は, $\xi = \epsilon^{\frac{1}{2}}(x - v_{p0} t)$, $\tau = \epsilon^{\frac{3}{2}} t$ で, それぞれの無次元量は, $\xi' = \xi / h_0 = \epsilon^{\frac{1}{2}}(x' - t')$, $\tau' = \tau v_{p0} / h_0 = \epsilon^{\frac{3}{2}} t'$ である.

以上のことより, ラプラス方程式 (1), 水底条件の式 (2), 水面条件の式 (3) の無次元方程式は, それぞれの方程式の変数にプライムを付した式となる. 運動方程式は次式のようなである.

$$\frac{\partial \phi'}{\partial \tau'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \right)^2 - c_0'^2 \tan \theta x' + c_0'^2 (1 + \eta') + \tan \theta \frac{c_0'^2}{u_0'} \phi' = 0 \quad (8)$$

4. 逐減摂動法による無次元波動方程式の導出

無次元量 η' , ϕ' は

$$\eta' = \epsilon \eta'^{(1)}(\xi', \tau') + \epsilon^2 \eta'^{(2)}(\xi', \tau') + \dots \quad (9)$$

$$\phi' = \epsilon^{\frac{1}{2}} \left\{ \phi'^{(1)}(\xi', y', \tau') + \epsilon \phi'^{(2)}(\xi', y', \tau') + \dots \right\} \quad (10)$$

$$\text{ここに, } \eta'^{(1)} = \frac{\eta^{(1)}}{h_0}, \quad \eta'^{(2)} = \frac{\eta^{(2)}}{h_0}, \quad \dots$$

$$\phi'^{(1)} = \frac{\phi^{(1)}}{h_0 v_{p0}}, \quad \phi'^{(2)} = \frac{\phi^{(2)}}{h_0 v_{p0}}, \quad \dots \quad (11)$$

また, $y = 0$ の近傍で, Boussinesq の Taylor 展開を用いる.

無次元基礎方程式の摂動展開はラプラス方程式, 水底条件式および水面条件式については明らかにされているので運動方程式について記すと次式のようなである.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \phi'}{\partial \tau'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x'} \right)^2 - c_0'^2 \tan \theta x' + c_0'^2 (1 + \eta') \\ & \quad + \tan \theta \frac{c_0'^2}{u_0'} \phi' \\ & = -\epsilon \left(\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} + \epsilon \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial \xi'} + \dots \right) \\ & \quad + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \tau'} + \epsilon \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \tau'} + \epsilon^2 \frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial \tau'} + \dots \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left\{ \left(\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \right)^2 + 2 \epsilon \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} + \epsilon^2 \left(\frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} \right)^2 + \dots \right\} \\ & \quad - c_0'^2 \tan \theta x' + c_0'^2 \\ & \quad + c_0'^2 (\epsilon \eta'^{(1)} + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \epsilon^3 \eta'^{(3)} + \dots) \\ & \quad + \tan \theta \frac{c_0'^2}{u_0'} \left\{ \epsilon^{\frac{1}{2}} (\phi'^{(1)} + (\epsilon \eta'^{(1)} \right. \\ & \quad \left. + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \dots) \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} + \dots \right) \\ & \quad + \epsilon^{\frac{3}{2}} \left(\phi'^{(2)} + (\epsilon \eta'^{(1)} + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \dots) \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial y'} + \dots \right) \\ & \quad \left. + \epsilon^{\frac{5}{2}} \left(\phi'^{(3)} + (\epsilon \eta'^{(1)} + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \dots) \frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial y'} + \dots \right) \right\} = 0 \quad (12) \end{aligned}$$

摂動展開方程式の ϵ の次数別方程式は, ラプラス方程式, 水底での境界条件, 水面での流体粒子の条件, 運動方程式のそれぞれの摂動展開方程式から, 次のように得られる.

$O(\epsilon^0)$ 次の項は

$$\begin{aligned} & -c_0'^2 \tan \theta x' + c_0'^2 = 0 \\ & \tan \theta = \frac{1}{x'} \quad (13) \end{aligned}$$

$O(\epsilon^{\frac{1}{2}})$ 次の項は

$$\frac{\partial^2 \phi'^{(1)}}{\partial y'^2} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1) \quad (15)$$

$$\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = 0) \quad (16)$$

$$-\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} + c_0'^2 \eta'^{(1)} + \tan \theta \frac{c_0'^2}{u_0'} \phi'^{(1)} = 0 \quad (17)$$

$O(\epsilon^{\frac{3}{2}})$ 次の項は

$$\frac{\partial^2 \phi'^{(1)}}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 \phi'^{(2)}}{\partial y'^2} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1) \quad (19)$$

$$-\eta'^{(1)} \frac{\partial^2 \phi'^{(1)}}{\partial y'^2} - \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial y'} - \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \xi'} = 0 \quad (y' = 0) \quad (20)$$

$$-\frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} + \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \tau'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \right)^2 + c_0'^2 \eta'^{(2)} + \tan \theta \frac{c_0'^2}{u_0'} \left(\eta'^{(1)} \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} + \phi'^{(2)} \right) = 0 \quad (21)$$

$O(\epsilon^{\frac{5}{2}})$ 次の項は

$$\frac{\partial^2 \phi'^{(2)}}{\partial \xi'^2} + \frac{\partial^2 \phi'^{(3)}}{\partial y'^2} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial y'} = 0 \quad (y' = -1) \quad (23)$$

$$-\eta'^{(2)} \frac{\partial^2 \phi'^{(1)}}{\partial y'^2} - \eta'^{(1)} \frac{\partial^2 \phi'^{(2)}}{\partial y'^2} - \frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial y'} - \frac{\partial \eta'^{(2)}}{\partial \xi'} + \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \tau'} + \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \frac{\partial \eta'^{(1)}}{\partial \xi'} = 0 \quad (y' = 0) \quad (24)$$

$$-\frac{\partial \phi'^{(3)}}{\partial \xi'} + \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \tau'} + \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial \xi'} \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial \xi'} + c_0'^2 \eta'^{(3)} + \tan \theta \frac{c_0'^2}{u_0'} \left(\eta'^{(2)} \frac{\partial \phi'^{(1)}}{\partial y'} + \eta'^{(1)} \frac{\partial \phi'^{(2)}}{\partial y'} + \phi'^{(3)} \right) = 0 \quad (25)$$

である。

上記の式 (13) から式 (25) より $\eta'^{(1)}$ の項の式に集約できるように展開する。かなり複雑な過程を要するが、 ϕ に関して $u_* \ll u_{p0}$ で無視できるものとし、運動方程式 (8) が定常流で等流の場合にも成り立つことを考慮すると波動方程式として次式を得る。ただし、 $\eta'^{(1)}$ を以下 η' で表す。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \tau'} + \frac{1}{2} (1 + 2c_0'^2) \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi'} - \frac{1}{2} \tan \theta \frac{c_0'^2}{u_0'} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial \xi'^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_0'^2} - 1 \right) \frac{\partial^3 \eta'}{\partial \xi'^3} = 0 \quad (26)$$

ここに、 $u_0' = \frac{u_0}{v_{p0}}$, $c_0' = \frac{c_0}{v_{p0}}$

上式は、左辺第 2 項が非線形項で時間とともに種々の

波数を生成する、第 3 項は散逸項で高周波の波形を低減させるとともに波形の変形をもたらす、第 4 項は波形の分散項で、KdV 方程式ではソリトンの特性をもたらす項である。

ここで、移動座標系の変換と同様な意味の G-M 変換におけるパラメータ v_{p0} をこれまで波動方程式の導出で用いられたのと同様に $v_{p0} = \sqrt{gh_0 \cos \theta}$ とすると、 $v_{p0} = c_0$ である。したがって、 $c_0' = c_0/v_{p0} = c_0/c_0 = 1$ であるから、式 (26) は次式ようになる。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \tau'} + \frac{3}{2} \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi'} - \frac{1}{2} \frac{\tan \theta}{u_0'} \frac{\partial^2 \eta'}{\partial \xi'^2} = 0 \quad (27)$$

これは、相対的に静止している流体の長波の波速による移動座標系からみた水面変動を意味している。上式において、流速分布形の影響は含まれていないが、流れの機構を反映する抵抗則が u_0' に含まれている。

$u_0' = \frac{u_0}{c_0}$ であるから、流速係数 $\varphi = \frac{u_0}{u_*}$ 、摩擦損失係数と流速の関係 $\frac{u_0}{u_*} = \sqrt{\frac{2}{f'}}$ を用いれば式 (27) の左辺第 3 項は次式の関係がある。

$$-\frac{1}{2} \frac{\tan \theta}{u_0'} = -\frac{1}{2} \frac{c_0 \tan \theta}{u_* \varphi} = -\frac{1}{2} \sqrt{\tan \theta} \sqrt{\frac{f'}{2}} \quad (28)$$

5. 波動方程式の解析解

以下では式の煩雑さを緩和するために式 (27) の左辺第 3 項の係数部分を μ として次式のように置く。

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{\tan \theta}{u_0'} \quad (29)$$

したがって、波動方程式 (27) は次式のようなものである。

$$\frac{\partial \eta'}{\partial \tau'} + \frac{3}{2} \eta' \frac{\partial \eta'}{\partial \xi'} = \mu \frac{\partial^2 \eta'}{\partial \xi'^2} \quad (30)$$

以下、上式について検討する。

式 (30) はバーガース (Burgers) 方程式と同型である。バーガース方程式は N-S 方程式より気体を対象として理論的に導出された方程式である。式 (30) における右辺の μ はバーガース方程式では流体の粘性 ν を表している。ここで導かれた波動方程式は、式 (27) のように、水路勾配 $\tan \theta$ と流体の抵抗則を意味する無次元量 u_0' による項である。バーガース方程式についてはすでに詳細に検討されているが、ここでは、気体を念頭においたバーガース方程式とは境界条件、初期条件の取り扱いが異なるため、従来の解析方法を踏襲しつつ式 (30) の解について検討する。

変数 $z(\xi', \tau')$ を導入して次式のコール・ホップ変換

$$\eta' = -\frac{4}{3} \mu \frac{\partial}{\partial \xi'} \ln z = -\frac{4}{3} \mu \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial \xi'} \quad (31)$$

を用いると非線形微分方程式である式 (30) は次式の線

形の1次元熱伝導方程式となる。

$$\frac{\partial z}{\partial \tau'} = \mu \frac{\partial^2 z}{\partial \xi'^2} \quad (32)$$

そこで初期条件としての水面波の擾乱が解析解にどのように影響するか検討する。初期条件として、1) 固定の境界条件で周期的矩形波、2) 固定の境界条件で周期的な正弦波、3) 無限遠点の境界条件で単一矩形波とする初期条件による解析解を検討する。

(1) 周期的矩形波の初期条件に対する解

境界条件は、 $\xi' = -l, \xi' = l$ でそれぞれ $\eta' = 0$ とし、初期条件は、振幅 a 、周期 $T = 2l$ の矩形波とし、 $\eta'(-l, \tau') = -\frac{a}{2}$ 、 $(-l \leq \xi' \leq 0)$ 、 $\eta'(l, \tau') = \frac{a}{2}$ 、 $(0 \leq \xi' \leq l)$ である。初期条件をコール・ホップ変換により $z-\xi'$ 面での境界条件、初期条件に変換し、式(32)の解析解を得、その解析解を再度コール・ホップ変換を用いて式(30)の解析解 η' を求める。フーリエ級数展開を用いた解析解は次式のようなである。

$$\begin{aligned} \eta'(\xi', \tau') = & \left[a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + l^2r^2} \{e^{lr} - \cos(n\pi)\} \right. \\ & \cdot \left. \sin\left(\frac{n\pi\xi'}{l}\right) e^{-\lambda_n^2\tau'} \right] \\ & \times \left[\frac{1}{lr} (e^{lr} - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2lr}{n^2\pi^2 + l^2r^2} \{e^{lr} - \cos(n\pi)\} \right. \\ & \cdot \left. \cos\left(\frac{n\pi\xi'}{l}\right) e^{-\lambda_n^2\tau'} \right]^{-1} \quad (33) \end{aligned}$$

ここに、

$$r = \frac{3a}{4\mu^2}, \quad \lambda_n = \frac{\sqrt{\mu n\pi}}{l} \quad (34)$$

式(33)の計算例を次図に示す。計算条件は、周期 $T = 2l$ で $l = 1$ 、矩形波の振幅 $a = 0.1$ 、これは水深 h_0 の $\frac{1}{10}$ である、 $r = 5.5$ ($\mu = 0.0068$)、これは水路勾配 $\theta = 3^\circ$ 、水深 $h_0 = 1.0\text{cm}$ 、流速 $u = 120\text{cm/s}$ の流れに相当している。無次元時間 τ' を $\tau' = 0.3, 1.0, 3.0, 5.0$ について示している。図-1の計算結果からわかるように、無次元時間 τ' の増加とともに波形が矩形から波状に変形し、少し頂部が減衰している。また、頂部はプラス方向に時間とともに移行し、谷部はマイナス方向に移行することがわかる。さらに、波形は時間の経過とともに谷部から頂部への変形が急激に生じるようになることが分かる。図-2は、矩形波の振幅 a を $a = 1$ 、無次元時間 τ' を $\tau' = 2$ の一定にして r を $r = 5, 10, 35, 65$ と変化させた場合の波形変化の計算例である。 $r = 3/(4\mu) \cdot (a/2)$ であるから、 μ が小さくなるほど r が大きくなる。これは同じ水深に対し流速が早いほど μ は小さくなり、 r は大きくなる。

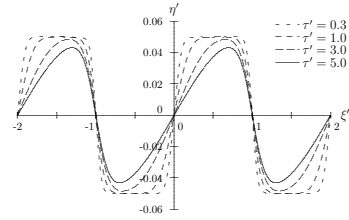


図-1 η' の計算例

($l = 1, a = 0.1, r = 5.5, \tau' = 0.3, 1.0, 3.0, 5.0$)

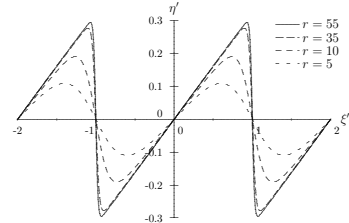


図-2 η' の計算例

($l = 1, a = 1, \tau' = 2, r = 5, 10, 35, 55$)

この結果を見ると r が大きくなるにしたがって、波高が大きくなるとともに谷部から頂部への波形が急激に変化することが分かる。

(2) 周期的正弦波の初期条件に対する解

境界条件は先の矩形波と同じ $\xi' = -l, \xi' = l$ でそれぞれ $\eta' = 0$ とし、初期条件は振幅 a 、周期 $T = 2l$ の正弦波 $\eta'(\xi', 0) = \frac{a}{2} \sin \frac{\pi\xi'}{l}$ とする。

この境界条件、初期条件における解析解は、コール・ホップ変換を用いて前項と同様な方法で次式を得る。

$$\begin{aligned} \eta'(\xi', \tau') = & \left[\frac{a}{2r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n\pi}{l^2} \int_{-l}^l \text{Exp} \left[\frac{lr}{\pi} \cos \frac{\pi v}{l} + \frac{lr}{\pi} \right] \cos \frac{n\pi v}{l} dv \right\} \right. \\ & \cdot \left. \sin\left(\frac{n\pi\xi'}{l}\right) e^{-\lambda_n^2\tau'} \right] \\ & \times \left[e^{\frac{lr}{\pi}} J_0\left(\frac{lr}{\pi}\right) \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_{-l}^l \text{Exp} \left[\frac{lr}{\pi} \cos \frac{\pi v}{l} + \frac{lr}{\pi} \right] \cos \frac{n\pi v}{l} dv \right\} \\ & \cdot \left. \cos\left(\frac{n\pi\xi'}{l}\right) e^{-\lambda_n^2\tau'} \right]^{-1} \quad (35) \end{aligned}$$

ここに、 J_0 は第1種 Bessel 関数である。また、式中の積分表示は既往の関数表示としてあらわすことができないため積分表示のままとなっている。具体的な数値条件での η' の計算では積分表示の部分は数値積分を行う。

式(35)の計算例を図-3に示す。計算条件は、矩形波の場合と同じ条件で振幅 $a = 0.1$ 、 $r = 5.5$ 、無次元時間 τ' を $\tau' = 0.3, 1.0, 3.0, 5.0$ とする。図-3の計算結果によると矩形波の場合と同じように頂部はプラス方向に時間とともに移行し、谷部もマイナス方向に移行する。また、波形の急峻化が時間の経過とともに生じることが分かる。図-4は、上記の矩形波の場合と同じように、振幅 a を $a = 1$ 、無次元時間 τ' を $\tau' = 2$ で一定

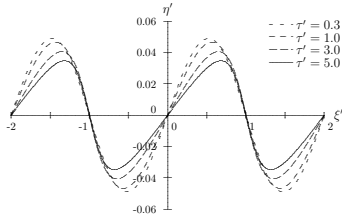


図 - 3 η' の計算例

($l = 1, a = 0.1, r = 5.5, \tau' = 0.3, 1.0, 3.0, 5.0$)

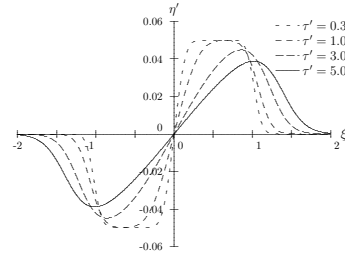


図 - 5 η' の計算例

($l = 1, a = 0.1, r = 5.5, \tau' = 0.3, 1.0, 3.0, 5.0$)

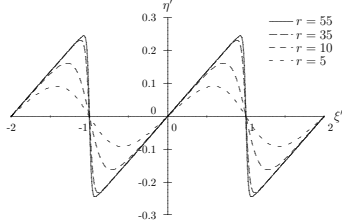


図 - 4 η' の計算例

($l = 1, a = 1, \tau' = 2, r = 5, 10, 35, 55$)

として r を $r = 5, 10, 35, 65$ と変化させた場合の計算例である。この結果をみると矩形波の場合の図 - 2 とほとんど同じ波形となっていることがわかる。これは初期条件の波形の違いにもかかわらず、ある程度時間の経過によりほぼ等しい波形となることを示している。

(3) 境界条件が無限遠点にあり単一矩形波の初期条件に対する解

境界条件は無限遠点で $\eta' = 0$ 、初期条件を $\eta' - \xi'$ 面で、 $\eta' = 0, (\xi' \leq -l), \eta' = -\frac{1}{2}a, (-l \leq \xi' \leq 0), \eta' = \frac{1}{2}a, (0 \leq \xi' \leq l), 0, (l \leq \xi')$ とする単一矩形波における解析解は、コール・ホップ変換された熱伝導方程式の解法にフーリエ積分を用い、次式のように得られる。

$$\begin{aligned} \eta'(\xi', \tau') = & +\frac{a}{2} \left[e^{r(l+\mu\tau'-\xi')} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{2\mu\tau'-\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{l+2\mu\tau'-\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) \right\} \right. \\ & - e^{r(l+\mu\tau'+\xi')} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{2\mu\tau'+\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{l+2\mu\tau'+\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) \right\} \\ & \times \left[\left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{l-\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{1+\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) - 2 \right\} \right. \\ & + e^{r(l+\mu\tau'-\xi')} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{2\mu\tau'-\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{l+2\mu\tau'-\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) \right\} \\ & \left. \left. + e^{r(l+\mu\tau'+\xi')} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{2\mu\tau'+\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{l+2\mu\tau'+\xi'}{2\sqrt{\mu\tau'}} \right) \right\} \right]^{-1} \right. \\ & \left. (36) \right. \end{aligned}$$

計算条件は、先の周期解の場合と同じ条件で振幅 $a = 0.1, r = 5.5$ 、無次元時間 τ' を $\tau' = 0.3, 1.0, 3.0, 5.0$ の計算例を図 - 5 に示す。この計算結果によると、周期解の場合と同様に時間 τ' の経過とともに波形の頂部は正方向に移動し、谷部は負方向に移動する。しかし、周期解の場合のように $2T$ の周期で固定された境界条件と

は異なり、半周期は時間の経過とともに長くなることを示している。

以上のように3つの異なった初期条件により、波動方程式から得られる解析解はそれぞれ異なる結果となるが、時間の経過とともに同じような波形に変形していくことが分かる。

6. 解析解と実験結果との比較

長さ 56m、幅 10cm、深さ 10cm の循環式直線水路における流水実験で生成した転波列の波形を前章の解析解の結果と比較する。実験条件は表 - 1 のようである。

表 - 1 実験条件, 計算条件

No.	θ (deg.)	Q (cm^3/s)	h (cm)	v (cm/s)	C	μ	$r(a=1)$
1	3.0	811.4	0.86	84.3	0.0	0.00806	46.5
2	3.0	969.3	1.18	82.1	0.226	0.01084	43.6

No.1 は清水の場合で、流量 Q は水路下流端における計量柵による 5 回計測の平均値である。平均水深 h は変動する水深の約 120 秒の単純平均であり、平均流速 v は幅 10cm の矩形水路での平均水深 h の流積と流量 Q からの値である。 μ は式 (29)、 r は式 (34) による値である。No.2 はポリプロピレン粒子を体積濃度 $C=0.226$ 含有した流れである。ポリプロピレン粒子は円柱状の形状で名目直径 d は $d_{50}=2.9\text{mm}$ 、粒子密度 $\sigma=1.06\text{g}/\text{cm}^3$ である。

No.1 の実験結果例を図 - 6 に示す。流れの水面変動の計測は約 120 秒間行っているが、代表的な結果を波形の平均水深 h_0 からの無次元変動量 η' 、波形の周期 T を $T = 2l$ とする ξ' で示している。計測は水路上流端から 44m 下流の固定点における水面位置の時系列変化の値である。

上記の最初の波形の部分を図 (33) による計算結果との比較で図 - 7 に示す。水面変動がほぼ水深に近い振幅をするため $a = 1$ とし、実験条件から $\mu=0.00806(r=46.5)$ であり、無次元周期を $\xi'=2$ としている。また平均水深 h_0 はこの水深変動の平均としている。図中の小さな変動を示している実線が実験結果であり、なめらかな実線が計算結果である。計算結果と実験結果は良好な一致を示している。

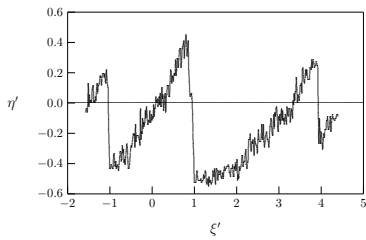


図 - 6 実験結果例 (No.1)

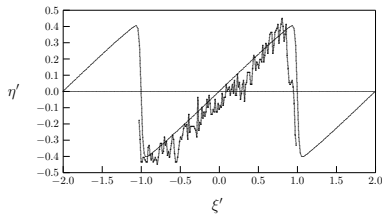


図 - 7 No.1 の実験結果と計算結果例

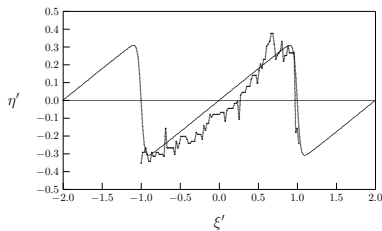


図 - 8 No.2 の実験結果と計算結果例

No.2の粒子を含有する実験結果と式(33)の計算結果との比較を図-8に示す。計算条件は上記No.1の場合と基本的に同じであり、 $a=1$ 、実験条件から $\mu=0.01084$ ($r=43.6$)としている。実験の水面変動の計測はNo.1と同様に約120秒行っているが代表的な例を用いている。図中の小さな変動を示している実線が実験結果であり、なめらかな実線が計算結果である。実験結果の波形は計算結果よりも水面の低下が少し早く生じていることを示しているが、概ね計算結果とよく対応している。

尚、解析解の計算例で無次元時間 $t' = 2$ を用いているが、これは初期条件の影響が減衰した時間として使用した。

以上のように波動方程式として式(27)あるいは式(30)による水面変動の解析解として式(33)と実験結果を比較すると、良好な対応をしていることが分かる。

7. 結論

土砂を含有する流れをの浅水流の運動方程式を用いて透減摂動法により波動方程式を導出した。初期条件として周期的な矩形波と正弦波、また単一矩形波を与えた場合の解析解を導出した。周期的な初期条件では矩形波と正弦波は無次元時間の経過とともにほぼ等しい波形となることを示した。転波列が十分発達した実験結果と計算結果との比較を行い、実験結果と解析解が良好に一致することを示した。これらのことにより波動方程式および解の妥当性を示した。

謝辞：実験の遂行にあたり京都大学防災研究所宇治川オープンラボラトリーの施設を使用した。ここに記して関係各位に謝意を表します。また、この研究の遂行にあたり京都大学大学院農学研究科教授水山高久先生、立命館大学教授里深好文先生のご協力を得ました。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, and Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences and Ministry of Water Conservancy: Japan-China Joint Research on the Mechanism and the Countermeasures for the Viscous Debris Flow, 206p., 1999.
- 2) 新井宗之：泥流の土石流サージ生成に関する基礎的研究, 水工学論文集, 土木学会, 第54巻, pp.649-654, 2010.3.
- 3) 新井宗之, 水山高久: 高濃度泥流サージの生成機構と流動モデルに関する研究, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.67, No.3, pp.92-100, 2011.9.
- 4) Dressler, R. F.: Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels, *Communication on Pure and Applied Mathematics*, Vol.II, No.2/3, 1949.
- 5) 石原藤次郎, 岩垣雄一, 岩佐義朗: 急斜面上の層流における転波列の理論—薄層流に関する研究(第5報)—, 土木学会論文集, 第19号, pp.46-57, 1954.4.
- 6) 疋田誠, 溜池博文, 松枝修治, 椿東一郎: 土石流における転波列の特性, 第29回水理講演会論文集, 土木学会, Vol.29, pp.543-548, 1985.2.
- 7) 五十嵐章, 泉典洋, 細田尚: 転波列の発達過程, 水工学論文集, 土木学会, 第48巻, pp.463-498, 2004.2.
- 8) Richard R. Brock: Development of roll-wave trains in open channels, *J. Hydraulics Division*, ASCE, Vol.95, No.HY4, pp.1401-1427, 1969.
- 9) Lanzoni S. and Seminara G.: Debris Waves, *Proceedings of XV IAHR Congress*, Technical Session B, pp.79-85, 1993.
- 10) Massimo Arattano, Andrea M. Deganutti and Lorenzo Marchi: Debris Flow Monitoring Activities in an Instrumented Watershed on the Italian Alps, *Proceedings of the First ASCE International Conference on Debris Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction and Assessment*, pp.506-515, 1997.
- 11) M. Murlimann, D. Rickenmann and C. Graf: Field and monitoring data of debris-flow events in the Swiss Alps, *Can. Geotech. J.*, 40, pp.161-175, 2003.
- 12) Huebl, J. and Kaitna, R.: Sediment delivery from the Lattenbach catchment by debris floods and debris flows, *Abstracts of European Geosciences Union General Assembly 2010*, EGU2010-10585, 2010.5.
- 13) Sandro Longo: Roll waves on a shallow layer of a dilatant fluid, *European Journal of Mechanics B(Fluids)*, 30, pp.57-67, 2011.
- 14) 新井宗之: 粘性土石流のサージ波長に関する基礎的検討, 水工学論文集, 土木学会, 第53巻, pp.709-714, 2009.3.
- 15) 新井宗之, 水山高久: 転波列性泥流のサージ波長に関する基礎的検討, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol. 67, No. 2(応用力学論文集 Vol. 14), pp.1345-1354, 2011.9.

(2012.9.30 受付)